|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  | |  | |
| **Aufgabe 1**  **INFO**  **Epoche**:  Altes China  **Thema**:  Dezimales Stellenwert-System  **Time-Code**:  02:45 - 04.54  **Aufgabe 2**  **INFO**  **Epoche**:  Altes China  **Thema**:  Magische Quadrate  **Time-Code**:  04:54 -  **Aufgabe 3**  **INFO**  **Epoche**:  Altes China  **Thema**:  Geometrische  Progression  **Time-Code**:  7:19 - 10:12  **Aufgabe 4**  **INFO**  **Epoche**:  Altes China  **Thema**:  Gleichungen  **Time-Code**:  10:12 - 12:50  **Aufgabe 5**  **INFO**  **Epoche**:  Altes China  **Thema**:  Chinesischer Restsatz  **Time-Code**:  12:50 bis 15:15  **Aufgabe 6**  **INFO**  **Epoche**:  Altes China  **Thema**:  Kubische Gleichungen **Time-Code**:  12:50 - 19:24  **Aufgabe 7**  **INFO**  **Epoche**:  Indien  **Thema**:  Dezimales Stellenwertsystem **Time-Code**:  19:24 - 27:24  **Aufgabe 8**  **INFO**  **Epoche**:  Indien  **Thema**:  Quadratische Gleichungen  **Time-Code**:  27:24 - 28:58  **Aufgabe 9**  **INFO**  **Epoche**:  Indien  **Thema**:  Trigonometrie  **Time-Code**:  29:00 - 31:31  **Aufgabe 10**  **INFO**  **Epoche**:  Indien  **Thema**:  Unendliche Reihen /  **Time-Code**:  31:31 - 36:50  **Aufgabe 11**  **INFO**  **Epoche**:  Islamisches Reich  **Thema**:  Algebra  **Time-Code**:  36:50 - 44:26  **Aufgabe 12**  **INFO**  **Epoche**:  Italien – 13. bis 16. Jh.  **Thema**:  Indo-arabische Ziffern / Kubische Gleichungen  **Time-Code**:  44:26 - 55:39 | |  | | **Dezimales Stellenwertsystem**  Kernstück der alten chinesischen Mathematik bildete ein verblüffend einfaches Zahlensystem: Um eine Summe zu bilden, wurden  Bambusstäbchen in Einer-, Zehner-, Hunderter- und Tausender-Reihen angeordnet.  Folgende Darstellung zeigt die Stäbchenanordnung für die Zahlen  1 bis 9.     1. Zeichne die Stäbchen für die rechts stehende Addition in das folgende Zahlenschachbrett.      1. Zeichne eigene Zahlenschachbretter mit Additionsaufgaben im dezimalen Stellenwertsystem der alten chinesischen Mathematik.   **Magische Quadrate**  Im nebenstehenden magischen Quadrat ergeben alle Zahlen in jeder Richtung - egal ob horizontal, vertikal oder diagonal - in der Summe immer die Zahl 15. Dies ist bei allen magischen Quadraten mit den Zahlen 1 bis 9 der Fall.   1. Löse das folgende magische Quadrat. Wie heisst die magische Zahl mit den Ziffern 1 bis 16?     Die magische Zahl heisst 34.   1. Notiere die entsprechende Berechnungsformel! 2. Ergänze die folgende Tabelle!  |  |  |  | | --- | --- | --- | | **Magisches Quadrat mit den Zahlen** | | **Magische Konstante** | | 1 bis 9 | 3 \* 3 | 15 | | 1 bis 16 | 4 \* 4 | 34 | | 1 bis 25 | 5 \* 5 | 65 | | 1 bis 36 | 6 \* 6 | 111 | | 1 bis 49 | 7 \* 7 | 175 | | 1 bis 64 | 8 \* 8 | 260 | | 1 bis 81 | 9 \* 9 | 369 |   **Geometrische Progression**  Am Hof des Kaisers von China spielten Mathematiker eine unverzichtbare Rolle. Der Kaiser trug seinen mathematischen Beratern sogar auf, ein System zu entwickeln, nach welchem er der grossen Anzahl Frauen, die in seinem Harem lebten, beiwohnen konnte. Nie um eine Finte verlegen, entschieden die mathematischen Berater, den Harem nach einer mathematischen Idee zu organisieren - der geometrischen Progression.   1. Suche im Internet oder in einem Lexikon die Definition für «geometrische Progression».   Eine geometrische Progression, auch geometrische Folge genannt, ist eine regelmässige mathematische Zahlenfolge mit der Eigenschaft, dass das Verhältnis zweier benachbarter Folgeglieder konstant ist.   1. Notiere die allgemeine Formel für die geometrische Reihe.   ai = a0 \* qi   1. Berechne mit Hilfe dieser Formel die einzelnen Glieder der geo-metrischen Reihe anhand des Beispiels aus dem Film.   a0 = 1  q= 3  ai = a0 \* qi  a1 = 1\* 31 = 3  a2 = 1\* 32 = 9  a3 = 1\* 33 = 27  a4 = 1\* 34 = 81   1. Notiere die Formel für die Berechnung eines x-beliebigen Gliedes einer geometrischen Reihe und berechne anschliessend das zehnte Glied, wenn a0 = 1 und q= -1/2 ist.   ai = a0 \* qi - 1  a10 = 1 \* - 0,59  a10 = - 1/512  **Gleichungen**  Gleichungen sind ein bisschen wie kryptische Kreuzworträtsel: Man bekommt eine bestimmte Anzahl von Informationen über unbekannte Zahlen. Man muss dann versuchen, von diesen Informationen die unbekannten Zahlen abzuleiten.  Hole dir die Informationen im Filmausschnitt über das Wägen von Pflaumen und Pfirsichen und berechne mit Hilfe von Gleichungen das Gewicht einer Pflaume und eines Pfirsichs.  Lösung:  x = Pflaumen  y = Pfirsiche  2(x + 3y) - 2x - y = 30g - 10 g  2x + 6y - 2 x – y = 20g  5y = 20g  y = 4g  daraus folgt  2(x + 3y) + 2x + y = 40g  2x + 6y + 2x + y = 40g  4x + 7y = 12g + 28g  4x = 12g  x = 3g  Eine Pflaume wiegt 3 Gramm, ein Pfirsich wiegt 4 Gramm.  **Chinesischer Restsatz**  In dem sogenannten «Chinesischen Restsatz» untersuchten die Chinesen eine ganz neue Art von Aufgabenstellung. Wir kennen dabei die Zahl, die übrig bleibt, wenn die unbekannte Zahl in der Gleichung durch eine gegebene Zahl geteilt wird, beispielsweise drei, fünf oder sieben.   1. Betrachte das Beispiel zum Chinesischen Restsatz im Film und beschreibe kurz wie die alten Chinesen dieses mathematische Problem angegangen sind.   Lösung:  Man hat einen Korb voller Eier, deren Anzahl unbekannt ist.  Ordnet man die Eier in Dreierreihen an, bleibt ein Ei übrig. Ordnet man sie in Fünferreihen an, bleiben zwei Eier übrig. Wenn man die Eier in Siebnerreihen anordnet, bleiben drei Eier übrig.  Die alten Chinesen entdeckten nun eine Systematik, um zu berechnen, dass die kleinste Zahl von Eiern, die im Korb liegen müsste, 52 ist.   1. Suche eine Definition für den Chinesischen Restsatz.   Lösung:  Der Chinesische Restsatz beschreibt die Lösung eines Systems von Kongruenzen der Form  x ≡ a1 (mod m1) ... x ≡ an (mod mn).   1. Notiere Anwendungsbeispiele für den Chinesischen Restsatz.   Lösung:   * Rechnen mit grossen Zahlen * Rechnen mit Polynomen * Messung der Planetenbahnen * Computerprogrammierung   Zusatzinformationen:   * <http://www.swisseduc.ch/informatik/diskrete_mathematik/chinesischer_restsatz/docs/crt.pdf> * <http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/chinesischerRestsatz.htm> * <http://www.youtube.com/watch?v=0sNG1hwk6pE>   **Kubische Gleichungen**  Der chinesische Mathematiker Ching Ju Xiao fand einen Weg, kubische Gleichungen zu lösen. Nehmen wir an, Ching wollte die genauen Abmessungen des Mao-Mausoleums wissen. Er kannte das Volumen des Gebäudes und die Beziehungen zwischen den Abmessungen. Zur Beantwortung der Frage nutzte Ching die bekannten Fakten, um eine kubische Gleichung aufzustellen. Daraus leitete er eine begründete Vermutung für die Abmessungen ab. Damit hat er zwar einen grossen Teil des Mausoleums erfasst, aber es bleiben Teile übrig. Ching nahm diese Stücke und stellte eine neue kubische Gleichung auf. Er konnte seine erste Vermutung verfeinern, indem er nach einer Lösung dieser neuen kubischen Gleichung suchte. Mit jedem Mal wurden die verbleibenden Teile kleiner und seine Vermutung besser.  Die Macht dieser Technik besteht darin, dass sie auf noch viel komplexere Gleichungen anwendbar ist. Ching nutzte diese Technik sogar, um eine Gleichung mit Zahlen bis zur Zehnerpotenz zu lösen. Dies war eine ausserordentliche Leistung und hochkomplexe Mathematik.  Ching mag seiner Zeit um Jahre voraus gewesen sein. Seine Technik hatte aber einen Haken: Sie führte nur zu einer näherungsweisen Lösung. Das mag für einen Techniker gut genug sein, nicht aber für einen Mathematiker. Ching konnte keine Formel aufstellen, die ihm eine genaue Lösung dieser komplexen Gleichungen ermöglichte. Heute wissen wir sie.   1. Notiere die Formel für kubische Gleichungen.   ax3 + bx2 + cx + d = 0 mit a 0   1. Löse die folgende Aufgabe.   27a3x3 + 27a2bx2 + 27a2cx + 27a2d = 0  Ein ausführlicher Lösungsweg ist im Vortrag zum Mathematischen Seminar im Studiengang Network Computing von Alf Krause zu finden:  <http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/seminar1/kubik.pdf>  **Das indische Zahlensystem - Negative Zahlen**  Die Erfindung des indischen Zahlensystems zählt zu den grössten intellektuellen Innovationen aller Zeiten. Man kann es gar als Universalsprache bezeichnen.  Probiere die folgenden Fragen zu diesem Thema zu beantworten, nachdem du den Filmausschnitt angeschaut hast.   1. Was ist am indischen Zahlensystem so anders und wegweisend im Vergleich zu anderen Zahlensystemen?  * Die Erfindung der NULL.  1. Notiere einige Fakten über die früheste Aufzeichnung dieser Erfindung.  * Früheste bekannte Aufzeichnung im 9. Jahrhundert. * Die neue Zahl ist in der Wand eines kleinen Tempels im Fort Gwalior in Zentralindien eingraviert.  1. Was war dank dieser Erfindung nun möglich?  * Es war nun möglich, astronomisch grosse Zahlen zu schreiben.  1. Notiere zwei Mutmassungen, wie es zu dieser Erfindung kam.  * Berechnungen mit Steinen im Sand. * Die Vorstellung des Nichts (Null) war mit dem Glauben der Inder verknüpft.  1. Notiere vier wesentliche Eigenschaften dieser Erfindung.   1 + 0 = 1  1 – 0 = 1  1 \* 0 = 0  1 : 0 =   1. Eine andere Erfindung in diesem Zusammenhang nannten die Inder «Schulden». Welche Art von Zahlen ist damit gemeint? Mache ein Beispiel aus dem indischen Alltag.  * Negative Zahlen * Wenn man beispielsweise drei Materialballen hat und vier davon wegnimmt. * Die Zahlen dienten nicht nur zum Zählen und Messen von Stoffballen. Die Zahlen hatten ein selbstständiges Leben abseits unserer realen Welt.   **Quadratische Gleichungen**  Der abstrakte indische Ansatz, mathematische Aufgaben zu lösen, legte das Problem offen, wie quadratische Gleichungen - also Gleichungen, die Zahlen mit Zweierpotenzen umfassen - zu lösen seien.   1. Dem brillanten indischen Mathematiker Brahmagupta ermöglichte sein Verständnis für negative Zahlen eine entscheidende Erkenntnis. Welche?   Brahmagupta erkannte, dass quadratische Gleichungen stets zwei Lösungen haben, von denen eine negativ sein kann.   1. Ein anderer grosser Mathematiker, der Grieche Euklid, beschäftigte sich bereits um 300 v. Chr. mit quadratischen Gleichungen. Er löste sie allerdings auf geometrischem Weg. Suche die beiden Lösungen der folgenden Gleichung und stelle sie geometrisch dar: x2 + 12x = 108  |  |  | | --- | --- | | x2 + 12x = 108  x2 + 12x + 62 = 62 + 108  x2 + 12x + 36= 36+ 108  x2 + 12x + 36= 144  (x + 6)2 = 144  *2 =*  x1 + 6 = 12  x1 = 12 - 6  x1 = 6  x2 + 6 = -12  x2 = -12 - 6  x2 = -18 | Aufgabe  Quadratische Ergänzung beidseits  62 ausrechnen  rechte Seite addieren  linke Seite mit binomischer Formel  links und rechts Wurzel ziehen  beidseits 6 subtrahieren  beidseits 6 subtrahieren |     **Trigonometrie**  Betrachte den Filmausschnitt über die indischen Entdeckungen zur Trigonometrie und löse anschliessend den folgenden Lückentext.  Die Macht der Trigonometrie liegt darin, dass sie wie ein Wörterbuch funktioniert und Geometrie in Zahlen und Zahlen in Geometrie übersetzt. Ausgangspunkt der Trigonometrie ist die Untersuchung rechtwinkliger Dreiecke.  In der Trigonometrie benutzt man einen Winkel (siehe Bild), um das Verhältnis der gegenüberliegenden Seiten zur längsten Seite zu ermitteln. Dazu wendet man die Sinusfunktion an. Gibt man den Winkel ein, erhält man das Seitenverhältnis. Das Ergebnis der Sinusfunktion ist ein Seitenverhältnis von Eins zu Zwei.  Die Sinusfunktion ermöglicht es, Entfernungen zu berechnen, wenn man keine genaue Messung anstellen kann. Heute wird die Sinusfunktion in Architektur und Technik genutzt. Die Inder nutzten sie zur Vermessung des Bodens, zur Navigation auf See und letztlich auch zur Erkundung der Tiefe des Raumes. Die indischen Astronomen konnten dank der Trigonometrie die relative Entfernung zwischen der Erde und dem Mond und der Erde und der Sonne zu ermitteln. Man kann diese Berechnungen nur durchführen, wenn der Mond halb voll ist, weil er nur dann direkt gegenüber der Sonne steht. Also bilden Sonne, Mond und Erde dann ein rechtwinkliges Dreieck.  Die Inder konnten den Winkel zwischen der Sonne und dem Observatorium messen. Er betrug ein siebtel Grad. Die Sinusfunktion eines siebtel Grads liefert das Seitenverhältnis 400:1. Das bedeutet, dass die Sonne ist vierhundertmal weiter von der Erde entfernt ist als der Mond. Mithilfe der Trigonometrie konnten indische Mathematiker das Sonnensystem erforschen, ohne jemals die Oberfläche der Erde zu verlassen.  **Unendliche Reihen - Die Entdeckung der Formel für**  In westlichen Universitäten lehrt man noch heute, dass die Formel für im 17. Jahrhundert vom deutschen Mathematiker Leibniz entdeckt worden sei. Aber eigentlich wurde sie bereits zwei Jahrhunderte früher in Kerala von Madhava entdeckt.  Mache dich mit Hilfe des Filmausschnittes kundig, wie Madhava vorging, um den genauen Wert von zu errechnen. Schätze, wie viele Rechenschritte du brauchst, bis du mit Madhavas Methode einen -Wert von 3,14... erhältst. Probiere aus!  4,00 - 4/3 + 4/5 = 3,4666666  3,46... - 4/7 + 4/9 = 3,33968254  3,33... - 4/11 + 4/13 = 3,28373848  3,28... - 4/15 + 4/17 = 3,252365935  3,25... - 4/19 + 4/21 = 3,232325809  3,23... - 4/23 + 4/25 = 3,218402766  3,21... - 4/27 + 4/29 = 3,208185652  3,20... - 4/31 + 4/33 = 3,200365515  3,20... - 4/35 + 4/37 = 3,194187909  3,19... - 4/39 + 4/41 = 3,189184782  3,18... - 4/43 + 4/45 = 3,185050415  3,18... - 4/47 + 4/49 = 3,181576685  3,18... - 4/51 + 4/53 = 3,178617011  3,17... - 4/55 + 4/57 = 3,176065177  3,17... - 4/59 + 4/61 = 3,173842337  3,17... - 4/63 + 4/65 = 3,171888735  3,17... - 4/67 + 4/69 = 3,170158257  3,17... - 4/71 + 4/72 = 3,168614749  3,16... - 4/73 + 4/75 = 3,167153562  3,16... - 4/81 + 4/83 = 3,164648477  3,16... - 4/85 + 4/87 = 3,163566665  3,16... - 4/89 + 4/91 = 3,162578888  3,16... - 4/93 + 4/95 = 3,161673399  3,16... - 4/97 + 4/99 = 3,160840326  3,16... - 4/101 + 4/103 = 3,160071317  3,16... - 4/105 + 4/107 = 3,159359256  3,15... - 4/109 + 4/111 = 3,158698045  3,15... - 4/113 + 4/115 = 3,158082423  3,15... - 4/117 + 4/119 = 3,157507834  3,15... - 4/121 + 4/123 = 3,156970308  3,15... - 4/125 + 4/127 = 3,156466371  3,15... - 4/129 + 4/131 = 3,155992971  3,15... - 4/133 + 4/135 = 3,155547412  3,15... - 4/137 + 4/139 = 3,15512731  3,15... - 4/141 + 4/143 = 3,154730544  3,15... - 4/145 + 4/147 = 3,154355221  3,15... - 4/149 + 4/151 = 3,15399965  3,15... - 4/153 + 4/155 = 3,153662311  3,15... - 4/157 + 4/159 = 3,153341836  3,15... - 4/161 + 4/163 = 3,153036993  3,15... - 4/165 + 4/167 = 3,152746665  3,15... - 4/169 + 4/171 = 3,152469839  3,15... - 4/173 + 4/175 = 3,152205594  3,15... - 4/177 + 4/179 = 3,151953093  3,15... - 4/181 + 4/183 = 3,151711569  3,15... - 4/185 + 4/187 = 3,151480321  3,15... - 4/189 + 4/191 = 3,151258709  3,15... - 4/193 + 4/195 = 3,151046141  3,15... - 4/197 + 4/199 = 3,150842075  3,15... - 4/201 + 4/203 = 3,150646011  3,15... - 4/205 + 4/207 = 3,150457487  3,15... - 4/209 + 4/211 = 3,150276077  3,15... - 4/213 + 4/215 = 3,150101385  3,15... - 4/217 + 4/219 = 3,149933046  **Die Erfindung der Algebra**   1. Schaue den Filmausschnitt über die Erfindung der Algebra (36:50 bis 44:26) an. Aufgrund dieser Informationen kannst du entscheiden, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.    Die Inder und Chinesen sowie Gelehrte aus dem arabischen Raum haben mathematische Erkenntnisse Jahrhunderte vor den westlichen Mathematikern gemacht. Diese wurden aber stets als Entdeckungen des Westens ausgegeben.    ☐ Der Westen hat freudig die grossen Durchbrüche anerkannt, die nicht westlichen Mathematikern gelungen sind.   Als der Westen im 18. und 19. Jahrhundert mehr und mehr in Kontakt mit dem Osten kam, war die Zurückweisung und Verunglimpfung der vom Westen kolonisierten Kulturen weit verbreitet.   Dank der Entwicklung einer der grössten Mächte der mittelalterlichen Welt im 7. Jahrhundert, einem neuen Reich im Nahen Osten, gewannen Mathematiker des Ostens bedeutenden Einfluss auf Europa.  ☐ In Bagdad wurde eine grosse Bibliothek und Schule gegründet - das Haus der Weisheit. Die davon ausgehende Lehre durchdrang das ganze islamische Reich und erreichte auch die Schulen in ganz Europa.  ☐ Die Gelehrten am Haus der Weisheit gaben sich mit der Übersetzung der mathematischen Erkenntnisse anderer zufrieden. Sie wollten keine eigenen Erkenntnisse gewinnen, um die Mathematik voranzubringen.   Dieses intellektuelle Interesse wurde in den ersten Jahrhunderten des islamischen Reiches aktiv gefördert. Nach dem Koran ist der Erwerb von Wissen eine göttliche Forderung. Es waren mathematische Kenntnisse verlangt, damit die Gebote des Islams eingehalten werden konnten.  ☐Das Gebot der bildlichen Darstellung menschlicher Gestalt bedeutete, dass Muslime ihre Gebäude mit wesentlich mehr geometrischen Mustern schmückten. Tatsächlich entdeckten muslimische Künstler sämtliche verschiedenen Symmetrien, die man an einer zweidimensionalen Wand darstellen kann.   Der persische Gelehrte al-Chwarizmi erkannte das gewaltige Potenzial der indischen Ziffern, um Mathematik und Wissenschaft zu revolutionieren. In seinen Arbeiten erläuterte er die Bedeutung dieser Ziffern für die Beschleunigung von Rechnungen.  ☐Es dauerte nicht lange und dieses System wurde allseits von den Mathematikern der westlichen Welt übernommen. Diese Ziffern, eins bis neun sowie null, sind noch heute bekannt als die indonesischen Ziffern.   Der Mathematiker al-Chwarizmi schuf auch eine ganz neue Sprache der Mathematik. Sie wird als Algebra bezeichnet. Die Bezeichnung leitet sich vom lateinischen Titel seines Buches «Über das Rechnen mit indischen Ziffern» oder «Rechnen durch Reduktion» ab.  Algebra ist die Grammatik, die der Funktionsweise von Zahlen zugrunde liegt. Wie eine Sprache erläutert sie die Muster hinter dem Verhalten von Zahlen. Sie ist insofern mit einem Code vergleichbar, wonach Computerprogramme ablaufen. Dieser Programmcode funktioniert mit allen Zahlen, die man in das Programm eingibt.  ☐ Algebra war aber kein wirklicher Durchbruch, denn diese neue Sprache half einem nicht, die Funktionsweise von Zahlen zu analysieren.  ☐al-Chwarizmi machte den Schritt vom Allgemeinen zum Konkreten. Er entwickelte den analytischen Weg, Probleme zu systematisieren, sodass die Lösungen funktionierten – und zwar mit jeder beliebigen Zahl. Das ist auch heute noch die Sprache, die man überall in der Welt der Mathematik verwendet.   Al-Chwarizmi gelang der Durchbruch, als er Algebra auf quadratische Gleichungen anwandte, also Gleichungen mit Zweierpotenzen. Die alten Mesopotamier hatten ein geschicktes Verfahren zur Lösung bestimmter quadratischer Gleichungen entwickelt. Aber erst Al-Chwarizmis abstrakte Sprache der Algebra erklärte schliesslich, warum dieses Verfahren stets funktioniert.   Al-Chwarizmis Entdeckungen gaben der Mathematik eine völlig neue Richtung und führten schliesslich zu einer Formel, die zur Lösung beliebiger quadratischer Gleichungen ganz unabhängig von den verwendeten Zahlen geeignet war.   1. Schreibe die Formel der quadratischen Gleichung in der  allgemeinen Form:   ax2 + bx + c = 0  und  deren Lösung   **Kubische Gleichungen**  Erst 500 Jahre nachdem der persische Mathematiker Omar Khayyam herausfand, wie kubische Gleichungen auf geometrischem Weg zu lösen sind, machten italienische Mathematiker eine bahnbrechende Entdeckung.  Stelle tabellarisch dar, wer wann und wo, was entdeckte.   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | **Wann?** | **Wo?** | **Wer?** | **Was?** | | 13. Jh. | Pisa | Leonardo da Pisa  «Fibonacci» | Schrieb ein Buch über die indo-arabischen Zahlen und deren Vorzüge gegenüber den römischen Zahlen und entdeckte die Fibonacci-Folge | | 16. Jh. | Bologna | Tartaglia | Entwickelte ein allgemeines algebraisches Verfahren zum Lösen von kubischen Gleichungen | | 16. Jh. | Bologna | Cardano/ Ferrari | Entwickelte ein Verfahren zur Lösung komplizierter Gleichungen 4. Grades und die nach ihm benannten Cardanischen Formel. | | |
|  |  | |  | |